# Frekvensrespons, impedans og reaktans?

Mats Høvin

23rd May 2002

## 1 Innledning

Bruken av komplekse tall ved beregninger innen elektronikk og signalbehandling er meget utbredt. For nye studenter er dette vanligvis ansett som noe av det mest vanskelige og utilgjengelige aspektet ved disse fagretningene. Mange lærebøker dekker bruken av komplekse tall og transformer på en utmerket måte, men veldig ofte er det lagt lite, eller ingen vekt på å introdusere studentene gradvis til disse abstrakte metodene. Når man har sittet lenge nok å lurt på *hvorfor* man kan bruke komplekse, eller "ikke-eksisterende" tall til å løse praktiske, eksisterende problem, og boka kun bruker en linje på å forklare det, kan man få en følelse av at det ikke var meningen at man skulle forstå noe av det. Resultatet blir derfor ofte at man lærer seg å bruke avanserte teknikker uten å forstå hvorfor de funker. Da har dessuten det meste en tendens til å gå i glemmeboka like etter eksamen.

Dette kompendiet er et forsøk på å forklare hva som ligger til grunn for begrepene frekvensrespons, impedans og reaktans, og hvorfor disse begrepene funker. Om det lykkes vet jeg ikke, men det var i alle fall godt ment. Tanken er å starte ut på et lett nivå, forsøke å finne et fast fundament som intuitivt lett kan forstås, og så på en så enkel måte som mulig gå opp veien fram til begrepene frekvensrespons, impedans og reaktans uten å etterlate hull i tankerekken. Kompendiet er bygd opp rundt et sett med oppgaver som løses fortløpende, men da det ofte krever endel tid og krefter å få på plass slike nye tanke modeller, vil jeg beskrive så enkle kretser som mulig. Jeg har derfor begrenset meg til feedback-løse RC kretser. Har man forstått grunnlaget basert på RC kretser, er det lett å generalisere til enhver dynamisk krets, inkludert kretser med spoler, OP'amper og feedback.

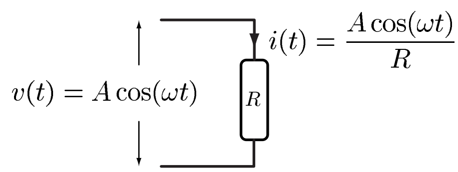
Det sentrale begrepet jeg ønsker å formidle, er frekvens respons. Dette er et kraftig begrep som ikke bare letter analysen av dynamiske kretser betraktelig, men også bidrar til økt forståelse av dynamiske system generelt. Begrepene impedans og reaktans blir en direkte konsekvens av å anvende begrepet frekvensrespons på elektroniske kretser bestående av R, C og L elementer. Men før vi starter, husk at begrepene frekvensrespons, impedans og reaktans bare har en mening når man analyserer lineære kretser med rene sinus og cosinus signaler på inngangene. Det man ønsker å finne er steady-state responsen, ikke en eventuell transient respons.

## 2 Enkle modeller basert på differensial ligninger

I det følgende ser vi på noen enkle lineære systemer. Når vi snakker om inngangs signaler og utgangs signaler i et lineært nettverk, står vi fritt til å definere disse selv. Vi kan, for eksempel, definere spenningen over en motstand som inngangs signalet, og strømmen i motstanden som utgangs signalet, eller motsatt. Vi kan til og med definere inngangs signalet som et signal i en komponent, og utgangs signalet som et signal i en annen komponent, en helt annen plass i nettverket.

### Oppgave 1

Gitt spennings signalet $v(t) = A\cos(\omega t)$ over en enkel motstand med resistans $R$, finn et uttrykk for strømmen som vil trenge i gjennom motstanden.




*Oppgave nr. 1*

I følge Ohm's lov er, til enhver tid, strøm lik spenning delt på motstand, dermed har vi

$$i(t) = \frac{A\cos(\omega t)}{R}$$

Man merker seg at strøm signalet bare er en ren skalering av spennings signalet, og at man har man et enkelt uttrykk for svaret uansett hvilken frekvens[1], fase[2] og amplitude inngangs signalet har. Dette er veldig greit.

### Oppgave 2

Anta at man sender en strøm $i(t) = A\cos(\omega t)$ inn i gjennom en kondensator, finn et uttrykk for spenningen som vil bygge seg opp over kondensatoren.

Her gjelder ikke Ohm's lov lengre, men når man sier at man sender en strøm inn i "gjennom" en kondensator, slik som illustrert i figuren, mener man egentlig at man øker antall elektroner på nederste plate og fjerner et tilsvarende antall elektroner på øverste plate (elektron-strøm retning). Dette gir opphav til et elektrisk felt i mellom platene, og dermed en spenning. Siden spenningen er proporsjonal med ladningen (antall elektroner) vi har tilført/fjernet fra platene kan man uttrykke spenningen ved integralet av strømmen over tid. Dermed er det man nå har å forholde seg til, differensial ligningen

$$v(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)d\tau \tag{1}$$

Man merker seg at spennings signalet ikke nødvendigvis er en ren skalering av strøm signalet, og at man, for å finne svaret på ligningen, må integrere inngangs signalet. Dette er generelt mye mere arbeid enn for tilfellet med motstanden. Hvis strømmen derimot er gitt av $i(t) = A\cos(\omega t)$ kan man i dette tilfelle finne løsningen ved

$$v(t) = \frac{A}{\omega C}\sin(\omega t)$$

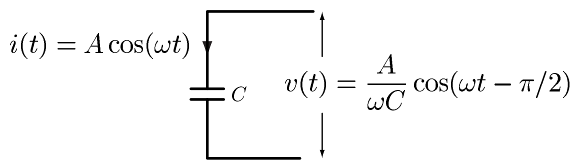
[1]Frekvensen $\omega = 2\pi f$, også kalt vinkelhastighet, er bare en skalering av den virkelige frekvensen $f$. Denne notasjonen brukes kun for å spare skrive arbeid.

[2]Med fase mener man variabelen $\theta$ i uttrykket $\cos(\omega t + \theta)$

Dette kan skrives som

$$v(t) = \frac{A}{\omega C} \cos(\omega t - \pi/2)$$

Man ser at for dette spesielle tilfelle, der strømmen er gitt av $A\cos(\omega t)$, blir spenningen også her en skalering av inngangs signalet, men signalet blir fase skiftet (forsinket) med $-\pi/2$. Det litt pussige er at maksimal spenning over kondensatoren dermed ikke kommer samtidig med at strømmen over den er på sitt høyeste, slik det er for en motstand.




*Oppgave nr. 2*

En annen ting man ser er at på grunn av kjerne regelen under integrasjon, har vi fått frekvensen $\omega$ i nevneren på skalerings faktoren. Dette betyr at for høye frekvenser vil amplituden på spenningen som bygger seg opp bli liten, og for lave frekvenser vil amplituden bli stor. Når frekvensen går mot null vil spenningen gå i mot uendelig. Dette kan intuitivt forstås som at hvis man tvinger inn en nesten konstant strøm og venter bortimot uendelig lenge, så vil jo naturlig nok spenningen bygge seg opp i mot uendelig.

### Oppgave 2b

Anta at man påtrykker spennings signalet $v(t) = A\cos(\omega t)$ over kondensatoren, finn et uttrykk for strømmen som vil gå i gjennom kondensatoren.

Som sagt, den eneste modellen man har for sammenheng i mellom strøm og spenning over en kondensator, er gitt av ligning 1. Dermed kan man finne svaret ved å snu ligningen (derivere begge sider)

$$i(t) = C\frac{dv(t)}{dt} \tag{2}$$

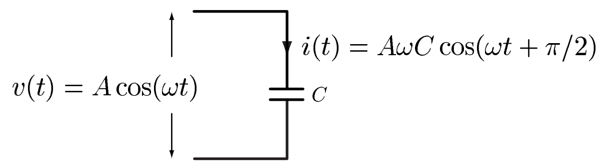
Her ser man at strømmen i kondensatoren er proposjonal med den deriverte av spenningen. Med andre ord, jo raskere spenningen forandrer seg, jo større strøm går det. Dermed, for en ren DC eller likespenning har man ingen strøm da kondensatoren nå blokkerer. Hvis spenningen er gitt av $v(t) = A\cos(\omega t)$ blir svaret fra ligning 2

$$i(t) = -\omega AC\sin(\omega t)$$

eller

$$i(t) = \omega AC\cos(\omega t + \pi/2)$$

Man ser at for dette spesielle tilfelle, der spenningen er gitt av $A\cos(\omega t)$, blir strømmen en skalering av inngangs signalet, fase skiftet med $+\pi/2$. (Har tatt med minus tegnet som gir et fase skift på $\pi$). Her ser vi at maksimal strøm i kondensatoren ikke kommer samtidig med at spenningen over den er maksimal, men kommer når den deriverte av spenningen er maksimal. Dette inntreffer når spenningen passerer 0V på vei oppover. På denne måten kommer det vi har definert som utgangs signalet (strømmen), før inngangs signalet (spenningen). Siden vi snakker om periodiske signaler, får vi likevel ingen problem med kausalitet.

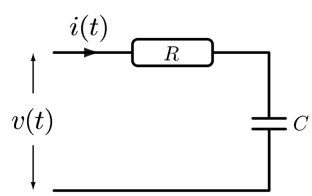



*Oppgave nr. 2b*

Også her ser vi at på grunn av kjerne regelen vil strømmen bli skalert med $\omega$. Dette medfører at for lave frekvenser vil amplituden på strømmen bli liten. Når frekvensen går mot null (DC) vil strømmen stoppe opp, og kondensatoren blokkerer. Når frekvensen går mot uendelig vil amplituden på strømmen gå mot uendelig, kondensatoren nå kan sees på som en ren kortslutning. Med andre ord, dess høyere frekvens man har på spenningen over en kondensator, dess mer strøm slipper den i gjennom.

### Oppgave 3

Gitt en strøm $i(t)$ inn på kretsen i figuren, sett opp en differensial ligning som beskriver sammenhengen i mellom spenningen $v(t)$ som bygger seg opp på inngangen, og strømmen inn i kretsen.




*Oppgave nr. 3*

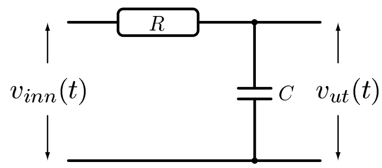
Her har en i følge Kirchoff at spenningen over motstanden pluss spenningen over kondensatoren må være lik spenningen inn.

$$v(t) = v_C(t) + v_R(t)$$

Dermed har en, i fra ligning 1 at

$$v(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)d\tau + i(t)R \tag{3}$$

Denne differensial ligningen beskriver sammenhengen i mellom en generell inngangs spenning og strømmen som vil gå inn i kretsen. Som vi ser, vil løsningen være sterkt avhengig av hvilket type signal man kjører inn.




*Oppgave nr. 3b*

### Oppgave 3b

Finn en differensial ligning som beskriver sammenhengen i mellom spenningen inn og spenningen ut av kretsen i figuren.
Siden utgangen av kretsen ikke er belastet, vet vi at strømmen i gjennom motstanden til enhver tid må være lik strømmen i gjennom kondensatoren

$$i_C(t) = i_R(t)$$

Dermed har en, fra ligning 2 at

$$C\frac{dv_{ut}(t)}{dt} = \frac{v_R(t)}{R}$$

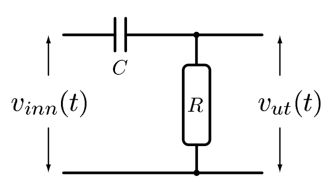
Vi vet og, i følge Kirchoff, at $v_R(t) = v_{inn}(t) - v_{ut}(t)$, dermed har vi at

$$RC\frac{dv_{ut}(t)}{dt} = v_{inn}(t) - v_{ut}(t)$$

Denne differensial ligningen beskriver sammenhengen i mellom inngangs spenning og utgangs spenning i kretsen. Fra ligningen kan vi også her ane at at denne sammenhengen er helt avhengig av det påtrykte signal $v_{inn}(t)$.

### Oppgave 4

Finn en differensial ligning som beskriver sammenhengen i mellom spenningen inn og spenningen ut av kretsen i figuren.




*Oppgave nr. 4*

Som før har vi at strømmen i gjennom motstanden til enhver tid må være lik strømmen i gjennom kondensatoren, $i_C(t) = i_R(t)$. Dermed har vi at

$$C\frac{dv_C(t)}{dt} = \frac{v_{ut}(t)}{R}$$

Vi vet og at $v_C(t) = v_{inn}(t) - v_{ut}(t)$, slik at

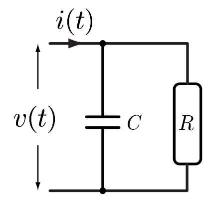
$$RC\frac{dv_{inn}(t)}{dt} - RC\frac{dv_{ut}(t)}{dt} = v_{ut}(t).$$

## Oppgave 5

Finn sammenhengen i mellom spenning og strøm inn på kretsen i figuren.

Her har en i følge Kirchoff at summen av strømmen i gjennom kondensatoren $i_C(t)$, og strømmen i gjennom motstanden $i_R(t)$ må være lik strømmen inn i kretsen.

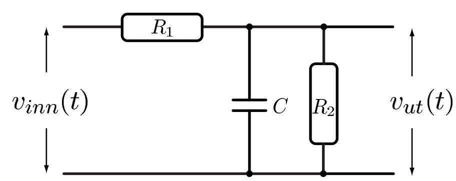
$$i(t) = C\frac{dv(t)}{dt} + \frac{v(t)}{R}$$




*Oppgave nr. 5*

## Oppgave 6

Finn en differensial ligning som beskriver sammenhengen i mellom spenningen inn og spenningen ut av kretsen i figuren.




*Oppgave nr. 6*

Her har en i følge Kirchoff at summen av strømmen i gjennom kondensatoren $i_C(t)$ og strømmen i gjennom motstanden $i_{R_2}(t)$, til sammen må være lik strømmen i gjennom $R_1$.

$$i_{R_1}(t) = i_C(t) + i_{R_2}(t)$$

Dermed har vi

$$\frac{v_{R_1}(t)}{R_1} = C\frac{dv_{ut}(t)}{dt} + \frac{v_{ut}(t)}{R_2}$$

Så vet vi at $v_{R_1} = v_{inn}(t) - v_{ut}(t)$, og vi får resultatet

$$\frac{v_{inn}(t)}{R_1} - \frac{v_{ut}(t)}{R_1} = C\frac{dv_{ut}(t)}{dt} + \frac{v_{ut}(t)}{R_2}$$

som kan trekkes sammen til

$$v_{inn}(t) = R_1 C\frac{dv_{ut}(t)}{dt} + v_{ut}(t)\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right)$$

## 3 Komplekse tall

Poenget med dette avsnittet er å bli fortrolig med komplekse tall representert på eksponentiell form.

### Oppgave 7

Gitt to komplekse tall $c_1 = 3 + j4$ og $c_2 = 4 + j3$, finn summen av tallene. Finn $c_1 - c_2$, samt $c_1$ multiplisert med $c_2$.

**Sum:** Adderer real og imaginær del hver for seg:

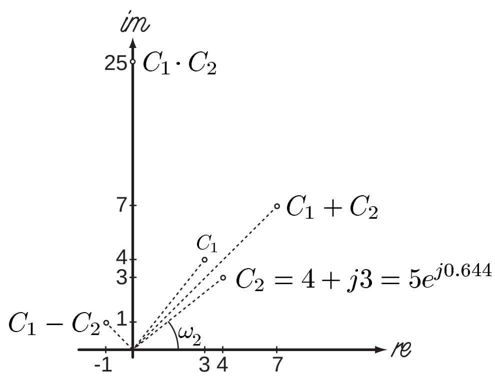
$$(3 + j4) + (4 + j3) = (3 + 4) + j(4 + 3) = 7 + j7$$

**Differanse:** Subtraherer real og imaginær del hver for seg:

$$(3 + j4) - (4 + j3) = (3 - 4) + j(4 - 3) = -1 + j$$

**Produkt:** Finnes ved vanlig utregning, men husker på at $j \cdot j = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = -1$

$$(3 + j4)(4 + j3) = 3 \cdot 4 + 3 \cdot j3 + j4 \cdot 4 + j4 \cdot j3 = j25$$




*Oppgave nr. 7-8*

### Oppgave 8

Gitt to komplekse tall $c_1 = 3 + j4$ og $c_2 = 4 + j3$. Uttrykk tallene på eksponentiell form ($Ae^{j\omega}$).

Euler har på en eller annen mystisk måte funnet ut at opphøyer man tallet $e$ i tallet $j\omega$, der $\omega$ er et reell tall, får man et komplekst tall som har helt identiske egenskaper med det komplekse tallet $\cos\omega + j\sin\omega$. Dette er ikke lett å se da et komplekst tall i seg selv er en abstrakt størrelse som gir uttrykket $e^{j\omega}$ en, om mulig, enda mer abstrakt dimensjon. I alle fall så har han funnet ut at under alle mulige regne operasjoner oppfører tallet $e^{j\omega}$ seg helt identisk med tallet $\cos\omega + j\sin\omega$. Ut i fra dette har han til slutt klart å bevise at disse to tallene virkelig er identiske.

Tallet $e^{j\omega}$ er begrenset til å ligge på en sirkel i det komplekse plan med radius 1 og senter i origo. Dette ser en enklest ut i fra uttrykket $\cos\omega + j\sin\omega$ for forskjellige verdier på $\omega$. Hvis man vil uttrykke et vilkårlig komplekst tall, både utenfor og innenfor enhetssirkelen, på eksponential form, må man derfor multiplisere $e^{j\omega}$ med en passende konstant $A$. Dermed har man at et hvert komplekst tall kan skrives på formen $Ae^{j\omega}$. Dette er en polar form, da $\omega$ representerer vinkelen til tallet og $A$ modulen eller avstanden til origo. Her må en merke seg at $Ae^{j\omega}$ ikke bare er en konvensjon, eller en måte å skrive et komplekst tall på, tallet $Ae^{j\omega}$ er et fullverdig tall som vil oppføre seg identisk med det opprinnelige tallet under alle mulige regne operasjoner.

For å kunne overføre et vilkårlig tall gitt på formen $x + jy$ til eksponentiell form kan vi ut i fra sammenhengen

$$Ae^{j\omega} = A\cos\omega + jA\sin\omega$$

sette $x = A\cos(\omega)$ og $y = A\sin(\omega)$, og finne at

$$|x + jy|e^{j\angle(x+jy)} = x + jy$$

med andre ord, vi har at det opprinnelige tallet kan skrives som modulen til tallet multiplisert med $e$ opphøyd i $j$ ganger vinkelen i mellom tallet og den reelle aksen. Et enkelt uttrykk for modulen og vinkelen er som følger

$$\sqrt{x^2 + y^2} \cdot e^{j\tan^{-1}(y/x)} = x + jy \tag{4}$$

Tallet $c_1 = 3 + j4$ kan nå skrives som $\sqrt{3^2 + 4^2} \cdot e^{j\tan^{-1}(4/3)}$ som blir $5e^{j0.927}$, og da får en bare stole på Euler som sier at dette tallet vil oppføre seg identisk med tallet $3 + j4$ under alle mulige regne operasjoner. Tilsvarende har en at tallet $c_2 = 4 + j3$ kan skrives som $5e^{j0.644}$. Hvis en ønsker å finne produktet av tallene, nå gitt på eksponentiell form, er det bare å regne i vei med vanlige potens regler

$$5e^{j0.927} \cdot 5e^{j0.644} = 5 \cdot 5e^{j(0.927+0.644)} = 25e^{j1.570}$$

Nå viser det seg at vinkelen 1.570rad tilsvarer $\pi/2$, og i fra sammenhengen $e^{j\pi/2} = \cos(\pi/2) + j\sin(\pi/2) = 0 + j \cdot 1 = j$, ser man at svaret blir $j25$ som stemmer med utregningen i oppgave 7.

### Oppgave 9

Gitt to komplekse tall $c_3 = j7$ og $c_4 = 3$, uttrykk tallene på eksponentiell form.

Modulen til $c_3$ er 7 og vinkelen fra $c_3$ til den reelle aksen er $\pi/2$, dermed har vi at $j7 = 7e^{j\pi/2}$. Modulen til $c_4$ er 3, og vinkelen i mellom $c_4$ og den reelle aksen er 0. dermed har vi at det reelle tallet 3 kan skrives som $3 = 3e^{j0}$. Tenker vi oss om, vet vi jo at et hvert tall forskjellig fra null opphøyd i null er lik 1, dermed, $3e^{j0} = 3 \cdot 1 = 3$.

Poenget med dette avsnittet har vært å gi noen eksempler som viser at et komplekst tall representert på eksponentiell form, uttrykt ved $Ae^{j\omega}$, oppfører seg identisk med tallet representert på formen $x + jy$ under vanlige regneregler.

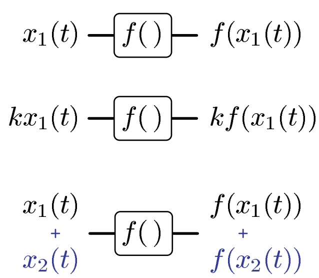
## 4 Løsning av differensial ligninger ved bruk av signalet $e^{j\omega t}$

En elektrisk krets bestående av motstander, spoler og kondensatorer kan modelleres med en første-ordens lineær differensial ligning slik vi har sett eksempler på i oppgave 1-6. Det å løse en slik ligning er generelt mye arbeid avhengig av hva slags signal man har inn på kretsen. Hvis man derimot begrenser seg til å se på sinus/cosinus signaler, vil vanskelighets graden ved å løse ligningene reduseres, men fremdeles kan jobben være meget tidkrevende. Sinus/cosinus signaler har vist seg å være svært viktige signaler innen elektronikk da det kan vises at et vilkårlig signal kan approksimeres så godt man bare ønsker ved en skalert sum av sinus/cosinus signaler. Dette, og det faktum at kretsene er lineære betyr at; kjenner man kretsens respons på et generelt cosinus signal, kan en lett finne kretsens respons på et vilkårlig signal (jmf. Fourier transform).

Definisjonen på en lineær krets er todelt:

1. Multipliserer man inngangs signalet med en konstant $k$, vil utgangs signalet bli $k$ ganger større. Konstanter "slipper" altså direkte i gjennom kretsen.

2. Adderer man et nytt signal til det opprinnelige inngangs signalet, vil utgangs signalet inneholde det opprinnelige utgangs signalet pluss kretsens respons på det nye signalet. Det opprinnelige utgangs signalet blir altså ikke "ødelagt" eller "mikset" med det nye signalet, og det blir derfor mulig å finne igjen det opprinnelige signalet på utgangen.

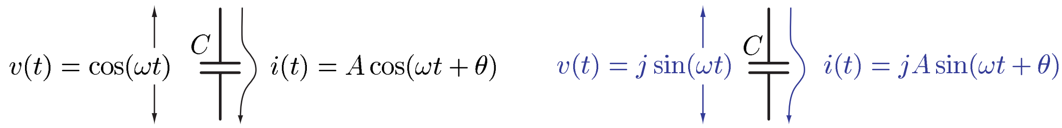



*Lineær krets*

Siden et kompleks tall er et fullverdig tall på alle måter, gir det også mening å la definisjonen av linearitet gjelde komplekse inngangs/utgangs signaler. Et komplekst signal har selvfølgelig ingen fysisk mening, men matematisk sett er signalet et fullverdig signal på lik linje med et komplekst tall.

De to nevnte egenskapene til en lineær krets, kan nå brukes til å forenkle løsningen av differensial ligninger med sinus/cosinus signaler inn. Her er det komplekse tall kommer inn i bildet, og på en mystisk måte forenkler hele løsnings prosessen. Gitt den enkle lineære kretsen til venstre i figuren under, bestående av en enkel kondensator. Hvis man påtrykker spenningen $v(t) = \cos(\omega t)$ over kondensatoren, vet man at man får en strøm gitt ved en skalert og fase skiftet utgave av inngangs signalet, $i(t) = A\cos(\omega t + \theta)$, der $\theta$ er $\pi/2$. For spenningen $v(t) = \sin(\omega t)$ inn, får vi tilsvarende, $i(t) = A\sin(\omega t + \theta)$ ut. Da dette er en reell, lineær krets, vet man at hvis man multipliserer inngangs signalet med konstanten $j$, så vil denne konstanten "slippe" i gjennom slik som illustrert til høyre i figuren.

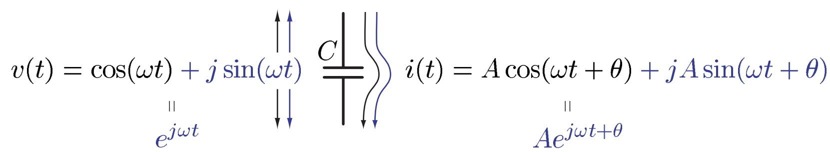
Det man nå har, er et imaginært signal på inngangen som resulterer i et imaginært signal på utgangen. Dette er matematisk sett helt greit da et komplekst tall er like




Venstre: *Reell (fysisk) strøm som følge av et reelt spennings påtrykk.* Høyre: *Imaginær (teoretisk) strøm som følge av et imaginært (teoretisk) spennings påtrykk*

fullverdig som et reelt tall under alle mulige regne operasjoner. På den annen side, den praktiske betydningen har nå falt helt bort da man meget vanskelig kan se for seg et komplekst strøm/spennings signal.

Hvis man derimot adderer dette imaginære spennings signalet på det reelle spennings signalet, sier kretsens lineære egenskaper at det reelle utgangs signalet ikke vil bli påvirket av at kretsen nå også fører et imaginært signal i gjennom seg. Dette er selvfølgelig bare et matematisk triks, (man kan fremdeles ikke ha et imaginært signal i en virkelig krets). På den annen side, ved å legge til denne imaginære hjelpe størrelsen kan man nå, i følge Euler, skrive inngangs signalet som $e^{j\omega t}$, og dette ... er tingen som skal til for å enkelt kunne løse differensial ligninger. Man husker jo at den deriverte av $e^t$ er lik $e^t$ selv, (må huske eventuell kjerne). Tilsvarende for integrasjon.



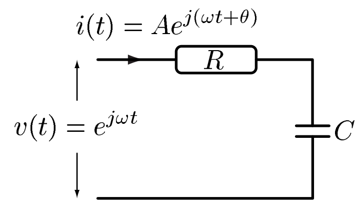

*Reell strøm blandet med imaginær strøm som følge av et spennings påtrykk bestående av en reell og en imaginær komponent*

Altså, for å summere opp; målet er å løse lineære differensial ligninger. Disse er generelt vanskelige å løse, men vi ønsker å løse dem for inngangs signaler på formen $\cos(\omega t)$. Dette er generelt enklere, men for større kretser, fremdeles tids krevende. Ved å addere på det imaginære hjelpe signalet $j\sin(\omega t)$, kan inngangs signalet istedenfor skrives på formen $e^{j\omega t}$. Dette letter løsnigsarbeidet av en differensial ligning betydelig. Når man så sitter igjen med løsningen av ligningen må man separere ut kretsens respons på det imaginære hjelpe signalet og kaste det, da dette signalet bare har vært med i prosessen for å lette løsnings arbeidet. Har man forstått dette lille trikset har man i praksis forstått hele dette kompendiet, da resten bare er detaljer. Nå er vi endelig klare til å løse differensial ligningene i fra oppgave 3-6 på en enkel måte.

### Oppgave 3

Når man sender en cosinus inn på et lineært system, vet vi at vi får en skalert og faseskiftet cosinus ut. Siden systemet er lineært, gjelder dette også for et kompleks signal på formen $e^{j\omega t}$. Sender man $e^{j\omega t}$ inn, får vi $Ae^{j(\omega t+\theta)}$ ut. For systemet i figuren skulle vi finne sammenhengen i mellom strøm og spenning inn på kretsen. Fra ligning 3 har vi at

$$v(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)d\tau + i(t)R. \tag{5}$$




*Oppgave nr. 3*

Med $i(t) = e^{j\omega t}$ vet vi at svaret blir på formen $v(t) = Ae^{j(\omega t+\theta)}$, og det eneste vi trenger å finne er $A$ og $\theta$. Putter man $i(t) = e^{j\omega t}$ inn i ligning 5, integrerer, og kombinerer med det generelle svaret, får vi

$$v(t) = Ae^{j(\omega t+\theta)} = \frac{1}{j\omega C}e^{j\omega t} + e^{j\omega t}R$$

Vi merker oss uttrykket $1/j\omega C$ som framkommer som følge av kjerneregel under integrasjon. Når man så trekker litt sammen får man

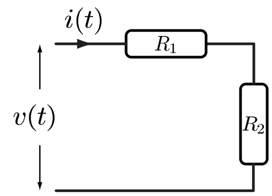
$$v(t) = Ae^{j(\omega t+\theta)} = \left(\frac{1}{j\omega C} + R\right) \cdot e^{j\omega t} \tag{6}$$

Dette er på sett og vis løsningen på ligningen, siden vi har fått utgangs signalet pent representert ved inngangs signalet multiplisert med en konstant (kompleks). Det som nå gjenstår er bare å separere ut kretsens respons på det imaginære hjelpe signalet som så skal kastes. Dette er det samme som å fjerne den imaginære delen av høyre side i ligning 6. Men før vi gjør det, merker vi oss at foran eksponential leddet på høyre side i ligningen, har vi i parentes et komplekst tall som ikke er gitt på eksponentiell form. Multipliserer man dette rett fram med eksponential leddet blir det bare grums. Heldigvis, takket være Euler kan man også skrive tallet i parentesen på eksponentiell form, og slår man sammen de to eksponential leddene man da får, og trekker sammen ekponentene, har man fått en høyre side på 100% eksponentiell form, $Ae^{j(\omega t+\theta)}$. Nå har vi funnet $A$ og $\theta$. I og med at $Ae^{j(\omega t+\theta)} = A\cos(\omega t+\theta) + jA\sin(\omega t+\theta)$, er det nå lett å fjerne den imaginære delen, og vi står igjen med at kretsens respons på det reelle signalet $\cos(\omega t)$ blir $A\cos(\omega t+\theta)$. Det var det.

Men, bortsett i fra at vi nå har løst differensial ligningen på en enkel måte, er det grunn til å stoppe litt opp, fordi ser man nøyere på ligning 6, ser man noe som egentlig er ganske bemerkelsesverdig; vi har representert utgangs signalet $v(t)$ som en ren skalering av inngangs signalet $i(t)$, og dette - selv om systemet opprinnelig var beskrevet av en differensial ligning. Dette fungerer kun for komplekse inngangs signal på formen $e^{j\omega t}$, og generelt må konstanten være kompleks, men like vel. Den komplekse konstanten kalles for kretsens **frekvensrespons**.

Altså, det vi nå har oppnådd er; hvis man har et komplekst inngangs signal på formen $e^{j\omega t}$, blir utgangs signalet rett og slett bare en kompleks skalering av inngangs signalet. Dette ligner litt på Ohm's lov, forskjellen er bare at signalene er komplekse. Hvis man kikker litt på det mest nærliggende restitive tilfelle der man har en krets bestående av to motstander $R_1$ og $R_2$ i serie, har en i følge Ohm's lov, at spenning er lik motstand multiplisert med strøm.

$$v(t) = (R_1 + R_2) \cdot i(t) \tag{7}$$




*Resitiv krets*

Sammenligner man ligning 6 og 7 ser man at i begge tilfeller er svaret en konstant skalering av inngangs signalet. I det resitive tilfelle representerer man komponentenes motstands verdier ved $R$. Spørsmålet er om man kanskje kan driste seg til å gjøre noe tilsvarende i det komplekse tilfelle. Fra ligning 6 ser man at motstandens bidrag også her er uttrykt ved $R$, mens kondensatorens bidrag eller "motstand" er gitt av $1/j\omega C$. Det viser seg at har man et inngangs signal på formen $e^{j\omega t}$, vil man uansett hvilken lineær RC krets man regner på, kunne ende opp med et uttrykk for svaret gitt på formen

$$y(t) = H(j\omega) \cdot e^{j\omega t}$$

der $H(j\omega)$ er en kompleks konstant som kalles kretsens frekvensrespons. Inne i denne konstanten vil bidrag fra motstander dukke opp som $R$ og bidrag fra kondensatorer dukke opp som $1/j\omega C$, der bidragene er knyttet sammen som om Ohm's lov var gjeldende. I denne sammenhengen kaller man en kondensator's "motstand" for reaktans, der verdien er gitt av $1/j\omega C$. Tilsvarende kan en vise at en spoles "motstand", som også kalles reaktans, kan skrives som $j\omega L$ der $L$ er spolens induktans.

For å summere opp; hvis man ønsker å løse differensial ligningene på en enkel måte kan man, hvis man snakker om inngangs signaler på formen $e^{j\omega t}$, nå begynne å regne på kretser med motstander, kondensatorer og spoler som om Ohm's lov var gjeldene. En motstand behandles som en motstand med verdi $R$, en kondensator behandles som en vanlig motstand med verdi $Z_C = 1/j\omega C$, og en spole behandles og som en vanlig motstand, men med verdi $Z_L = j\omega L$. Så er det bare å bruke vanlige regneregler for paralelkobling og serie kopling av motstander for å finne svaret. Haken er, selvfølgelig at inngangs signalet må være på formen $e^{j\omega t}$ eller $Ae^{j\omega t}$, og at vi må finne oss i å regne med komplekse tall. Man merker seg selvfølgelig og at "motstanden" til en kondensator og en spole må bli kompleks.

Når man så har satt opp ligningen for kretsen og løst den, slik som vist i ligning 6, har man funnet kretsens frekvensrespons gitt av det komplekse tallet foran inngangs signalet. Så gjenstår det å bare å separere ut og kaste den imaginære hjelpe størrelsen for å finne kretsens respons på det virkelige signalet $\cos(\omega t)$. Dette skal jeg nå vise en grei metode for. Med utgangs punkt i ligning 6 er denne kretsens frekvensrespons gitt av

$$H(j\omega) = Z_C + R = \left(\frac{1}{j\omega C} + R\right) \tag{8}$$

I dette tilfelle er inngangs signalet en strøm og utgangs signalet en spenning, derfor representerer frekvensresponsen her også kompleks "motstand" i kretsen: $Z_{tot} = Z_C + R$. En kompleks "motstand" som inneholder bidrag i fra reelle motstander (R) kalles impedans. $Z_{tot} = Z_C + R$ i ligning 8 kalles derfor impedans. Ok, vi ønsket å representere frekvensresponsen, som her er lik impedansen, på eksponentiell form ved hjelp av Euler. Har først fra ligning 6 at

$$v(t) = H(j\omega) \cdot e^{j\omega t}$$

som kan skrives som

$$v(t) = |H(j\omega)| e^{j\angle H(j\omega)} \cdot e^{j\omega t}$$

Trekker så sammen eksponentene og får

$$v(t) = |H(j\omega)| \cdot e^{j(\omega t + \angle H(j\omega))}$$

Nå kan en lett separere ut imaginær delen ved å igjen bruke Euler

$$v(t) = |H(j\omega)| \cdot \cos[\omega t - \angle H(j\omega)] + j|H(j\omega)| \cdot \sin[\omega t - \angle H(j\omega)]$$

Kaster så den imaginære hjelpe størrelsen og får kretsens respons på det reelle (virkelige) signalet $\mathcal{RE}\{i(t)\} = \cos(\omega t)$, som blir

$$\mathcal{RE}\{v(t)\} = |H(j\omega)| \cdot \cos[\omega t - \angle H(j\omega)]$$

Nå er en ved veis ende. Kjører man inn strømmen $\cos(\omega t)$ på nettverket i oppgave 3 bygger det seg altså opp en spenning over kretsen gitt av

$$|H(j\omega)| \cdot \cos[\omega t - \angle H(j\omega)]$$

der $|H(j\omega)|$, fra ligning 8 er gitt av $\sqrt{1/(\omega C)^2 + R^2}$, og $\angle H(j\omega)$ er gitt ved $\tan^{-1}(-1/(\omega RC))$. Som vi ser, inneholder frekvens responsen $H(j\omega)$ ved sin modul, informasjon om hvor mye cosinus signalet blir dempet eller forsterket av kretsen, og ved sin vinkel, hvor mye cosinus signalet blir faseskiftet i gjennom kretsen. Ellers ser man at $H(j\omega)$ er en kompleks konstant som forandrer seg med $\omega$ som er gitt av frekvensen på signalene inne i kretsen.

Vi ser at amplituden på spenningen som bygger seg opp over kretsen i oppgave 3 er avhengig av frekvensen på strømmen vi putter inn. For lave frekvenser vil spenningen bli høy, da "motstanden" i kondensatoren $1/(j\omega C)$ blir stor. For høye frekvenser blir "motstanden" og dermed spenningen over kondensatoren lav, og spenningen over kretsen er hovedsakelig gitt av spenningsfallet over motstanden $R$. Tilsvarende har en at ved lave frekvenser kommer maksimal spenning over kretsen nesten $\pi/2$ rad etter maksimal strøm da "motstanden" i kretsen blir dominert av kondensatoren. For høye frekvenser kommer maksimal spenning nesten helt i fase med maksimal strøm da motstanden er dominert av $R$.

### Generell løsnings metode basert på kretsens frekvensrespons

1. Hvis kretsens fysiske inngangs signal er på formen $\cos(\omega t)$, legg til det imaginære hjelpe signalet $j\sin(\omega t)$. Inngangs signalet kan nå skrives som $e^{j\omega t}$.

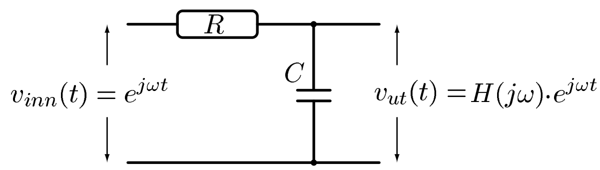
2. Nå kan man regne på krets elementene som om de var vanlige motstander der motstanden til en resistans er $R$, motstanden til en kondensator er $1/(j\omega C)$, og motstanden til en spole er $j\omega L$. Finn løsningen ved vanlig bruk av Ohm's og Kirchoff's lover.

3. Uttrykk løsningen på formen $y(t) = H(j\omega) \cdot e^{j\omega t}$, der $y(t)$ er det signalet man ønsker å finne, $e^{j\omega t}$ er inngangs signalet, og alle andre konstanter, komplekse og reelle, er samlet sammen i konstanten $H(j\omega)$.

4. For å kunne separere ut det imaginære hjelpe signalet fra $y(t)$, uttrykker man frekvensresponsen $H(j\omega)$ på eksponentiell form, dermed har en resultatet: $y(t) = |H(j\omega)| \cdot e^{j\omega t + \angle H(j\omega)}$
5. Ved å bruke Eulers formel og samtidig kaste imaginær delen av løsningen står en igjen med kretsens respons på det fysiske signalet $\cos(\omega t)$ som blir det reelle signalet $\mathcal{RE}\{y(t)\} = |H(j\omega)| \cdot \cos[\omega t + \angle H(j\omega)]$
6. Hvis inngangs signalet var gitt ved $A\cos(\omega t)$ kan konstanten A nå multipliseres med $\mathcal{RE}\{y(t)\}$ da en konstant passerer et lineært system uten modifikasjon.

### Oppgave 3b

Her ønsker vi å finne spenningen $v_{ut}(t)$ som funksjon av spenningen inn, $v_{inn}(t)$. Har




*Oppgave nr. 3b*

man en spenning inn gitt av $v_{inn}(t) = e^{j\omega t}$, kan man nå bruke vanlige regne regler for motstander for å finne spenningen ut. Man må nå regne med den komplekse "motstanden" for kondensatoren gitt av $Z_C = 1/(j\omega C)$. Setter så opp det vanlige uttrykket for en resitiv spennings deler

$$v_{ut}(t) = \frac{Z_C}{Z_C + R} \cdot v_{inn}(t) = \frac{1/(j\omega C)}{1/(j\omega C) + R} \cdot v_{inn}(t)$$

Dette kan skrives som

$$v_{ut}(t) = H(j\omega) \cdot v_{inn}(t)$$

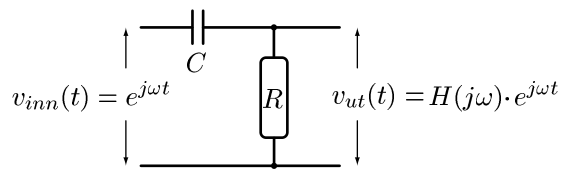
der frekvensresponsen er gitt ved

$$H(j\omega) = \frac{1/(j\omega C)}{1/(j\omega C) + R} = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

Siden både inngangs og utgangs signalene er spenninger, vil frekvensresponsen i dette tilfelle ikke representere kompleks motstand i kretsen. Sender vi inn det reelle signalet $\cos(\omega t)$ vil det komme ut et signal på formen $A \cdot \cos(\omega t + \theta)$ der $A$ er gitt av $|H(j\omega)|$ og $\theta$ er gitt av $\angle H(j\omega)$. Med andre ord, med spenningen $\cos(\omega t)$ på inngangen får man en spenning ut gitt av

$$\frac{1}{\sqrt{(\omega RC)^2 + 1}} \cdot \cos[\omega t + \tan^{-1}(\omega RC)]$$

Studerer man modulen til $H(j\omega)$, ser man at lave frekvenser slipper i gjennom med lite dempning, mens høye frekvenser blir kraftig dempet. Slike kretser brukes blant annet som lavpass filtre.




*Oppgave nr. 4*

**Oppgave 4**

Finn sammenhengen i mellom spenning inn og spenning ut av kretsen i figuren.

Setter opp det vanlige uttrykket for en resitiv spennings deler der "motstanden" til kondensatoren er gitt ved dens reaktans $Z_C$

$$v_{ut}(t) = \frac{R}{R + Z_C} \cdot v_{inn}(t) = \frac{R}{R + 1/(j\omega C)} \cdot v_{inn}(t)$$

Dette kan skrives som

$$v_{ut}(t) = H(j\omega) \cdot v_{inn}(t)$$

der frekvensresponsen er gitt ved

$$H(j\omega) = \frac{R}{R + 1/(j\omega C)} = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC}$$

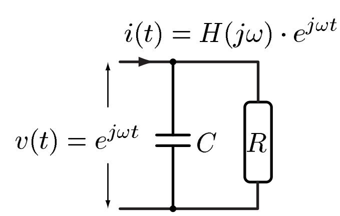
Med andre ord, for spenningen $\cos(\omega t)$ på inngangen, får man en spenning ut gitt av

$$\frac{\omega RC}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \cdot \cos[\omega t + \tan^{-1}(-1/(\omega RC))]$$

Kikker man på modulen til $H(j\omega)$, ser man at høye frekvenser slipper i gjennom med lite dempning, mens lave frekvenser blir kraftig dempet. Slike kretser brukes blant annet som høypass filtre.

**Oppgave 5**

Gitt spennings signalet $v(t)$ over kretsen i figuren, finn strømmen som vil gå inn i kretsen.




*Oppgave nr. 5*

Finner total impedans i kretsen ved uttrykket for parallell kopling av motstander:

$$Z_{tot} = \frac{Z_C \cdot R}{Z_C + R} = \frac{1/(j\omega C) \cdot R}{1/(j\omega C) + R} = \frac{R}{j\omega RC + 1}$$

I følge Ohm's lov har vi at strøm er lik spenning over motstand. Dette vil også gjelde her hvis spenningen er gitt på formen $e^{j\omega t}$.

$$i(t) = \frac{v(t)}{Z_{tot}} = (j\omega C + 1/R) \cdot v(t)$$

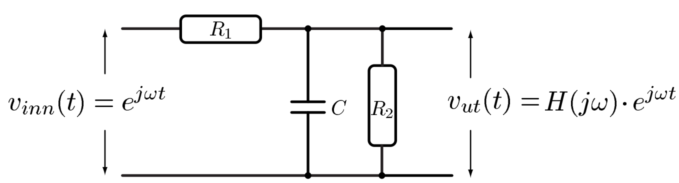
Her blir frekvensresponsen $H(j\omega) = j\omega C + 1/R$. Med andre ord, for spenningen $\cos(\omega t)$ over kretsen får man en strøm inn gitt av

$$i(t) = \sqrt{(\omega C)^2 + 1/R^2} \cdot \cos[\omega t + \tan^{-1}(\omega RC)]$$

Siden inngangs signalet var definert ved spenning, og utgangs signalet ved strøm, vil frekvensresponsen i dette til felle representere kompleks invers motstand eller admittans.

**Oppgave 6**

Finn sammenhengen i mellom spenning inn og spenning ut av kretsen under.




*Oppgave nr. 6*

Har man inngangs signalet gitt på formen $e^{j\omega t}$, kan man bare putte inn i uttrykket for parallell kopling av motstander, samt bruke uttrykket for en resitiv spenningsdeler

$$v_{ut}(t) = \frac{R_2 Z_C/(R_2 + Z_C)}{[R_2 Z_C/(R_2 + Z_C)] + R_1} \cdot v_{inn}(t)$$

$$v_{ut}(t) = \frac{(R_2 \cdot 1/j\omega C)/(R_2 + 1/j\omega C)}{(R_2 \cdot 1/j\omega C)/(R_2 + 1/j\omega C) + R_1} \cdot v_{inn}(t) = \frac{1}{1 + R_1/R_2 + j\omega R_1 C} \cdot v_{inn}(t)$$

Her blir kretsens respons på inngangs spenningen $\cos(\omega t)$ gitt av

$$\frac{1}{\sqrt{(1 + R_1/R_2)^2 + (\omega R_1 C)^2}} \cdot \cos[\omega t + \tan^{-1}(\omega R_1 C/(1 + R_1/R_2))]$$

## 4.1 Kommentar til begrepene "phasor" og "frekevens-domene"

Hvis man ser nøyere på løsningsmetodene beskrevet over, ser man at i det øyeblikk man har funnet frekvensresponsen til kretsen, har man egentlig funnet utgangs signalet, da dette er beskrevet ved modulen og fasen til frekvensresponsen. Men for å i det hele tatt kunne finne en frekvensrespons, må en representere inngangs signalet som en kompleks eksponential. Når inngangs signalet er representert ved en kompleks eksponential, lar vi det bare være slik helt til vi har funnet frekvensresponsen. Med andre ord, den komplekse eksponentialen er ikke i "bruk" før vi har funnet kretsens frekvensrespons. For å forenkle utregningene kan man derfor, hvis man vil, se på den komplekse eksponentialen bare som et symbol for inngangs signalet. Et symbol kan skrives på en hvilken som helst måte bare det representerer all nødvendig informasjon. Hvis man antar at frekvensen er fastsatt, blir all nødvendig informasjon gitt av amplituden og fasen til signalet. Det er dette som representeres i en såkalt phasor. En kompleks eksponentiell strøm $i_x(t) = Ae^{j(\omega t+\theta)}$ representert ved en phasor skrives defor slik

$$\mathbf{I}_x = A\angle\theta$$

Siden vi ikke trenger noe tids informasjon for å beskrive en phasor sier man at den er i frekvens domenet. Hvis dere synes phasor konseptet har noe for seg er det bare å bruke det, hvis ikke, er det ingen fare da det bare er et hjelpemiddel man bruker for å få ligningene til å se penere ut.